А. П. Котельников, Принцип относительности и Геометрия Лобачевского, *In mem. Lobatschevskii*, 1927, том 2, 37–66

Принцип относительности и Геометрия Лобачевского.

А. П. Котельников (Москва).

1. Уже в первых работах, посвященных принципу относительности и появившихся вскоре после знаменитого мемуара Einstein'а „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" *), мы находим намеки на то, что Геометрия Лобачевского при изложении этого принципа и при решении выдвинутых им проблем может оказаться весьма полезной.

Так H. Minkowski в своём классическом мемуаре: „Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Korper" **), доказывая ковариантность ур. Maxwell'a-Hertz'a ***) для Лоренцова преобразования, представляет это последнее как вращение на мнимый угол в плоскости x,t и полагает при этом $^v/_c = g = itgi\psi = th\psi$, т. е. выражает скорость при помощи гиперболического тангенса.

Воспользовавшись этим выражением скорости, A. Sommerfeld ****) показывает, что теорема сложения скоростей Enstein'а может быть весьма просто представлена треугольником сферы с мнимым радиусом. «Но», говорит Dr. V. Varićak*****), «гиперболическая геометрия есть

---

*) Эта статья представляет собой доклад, читанный 29 апр. 1923 г. в Москве Мат. Общ. и затем повторенный 16 Сент. 1923 г. в Киеве на публичном соединенном заседании научно-исследовательских кафедр, посвященном принципу относительности, и 25 февраля 1926 г. в Казани на публичном заседании Казанского Физ. Мат. Общ. в день празднования столетия неэвклидовой Геометрии.

**) Annalen der Physik. Vierte Folge. B. 17. 1905 p.p. 891—921.

***) Nachrichten von der Köngl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math-Phys. Klasse aus dem Jahre 1908.

****) A. Sommerfeld. Ueber die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie. Physikalische Zeitschrift. 10 Jahrgang 1909 pp. 826—826—829.

*****) За первыми работами V. Varićak'а в Physikalische Zeitschrift, 11, 1910 „Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie" p. 93—96; „Die Relativtheorie und Lobatschefskijsche Geometrie" 287—293; „Die Reflexion des Lichtes an bewegten Spiegeln" p. 586—587; Интерпретациja теориje релативности у Геометриjи Лобачевского" Глас Српске Кралевске Академиjи стр. 211—255, 1911; „Ueber die nichteuclidische Interpretation der Relativtheorie", Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 2103. 1912 p. 103—127 последовал целый ряд статей и заметок. Все эти работы разюмированы в книге: „Dr. V. Varićak Darstellung der Relativitätstheorie in dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume". 1924, 1—104.

мнимое отображение сферической, как это уже знали Лобачевский и Bolyai», и таким образом замечание A. Sommerfeld'a приводит к мысли о возможности применения Геометрии Лобачевского к принципу относительности.

G. Herglotz *) пользуясь простейшими фактами невклидовой Геометрии, которая, говорит он: «вообще в вопросах принципа относительности, напр при сложении скоростей, может быть весьма полезна», для того, чтобы найти все возможные, согласные с принципом относительности движения твердого тела, т. е. для решения задачи формулированной, но не вполне решенной M. Born'ом **)

Ряд аналогий между Геометрией Лобачевского и принципом относительности, замечание A. Sommerfeld'a и подстановка Г. Минковского $v/_c = th\psi$ натолкнули V. Varićak'a на мысль о неевклидовом истолковании принципа относительности. Результаты своих изследований он формулирует таким образом: «если положить в основу неевклидову терминологию, то не только существенным образом упрощаются формулы теории относительности, но они допускают также геометрическое истолкование, совершенно аналогичное интерпретации классической теории в Евклидовой Геометрии. И эта аналогия простирается местами так далеко, что можно оставить неизменной и словесную формулировку теорем с той лишь разницей, что надо заменить Евклидовы образы соответственными образами пространства Лобачевского с параметром $c=3.10^{10}$ сант.». В своих многочисленных заметках и мемуарах V. Varićak дает много примеров, иллюстрирующих его мысль: при помощи построений в пространстве Лобачевского, он весьма просто представляет закон сложения скоростей Einstein'a, принцип Doppler'a, аберрацию света, отражение света от движущегося зеркала и т. д.

В прекрасном мемуаре «О геометрических основаниях Лоренцовой группы» F. Klein ***), показав, что группа Лоренцовских преобразований есть проективная группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, тем самым устанавливает связь ее с группой преобразований пространства Лобачевского.

2. Таким образом благодаря указанным работам математиков обнаружилось, что Геометрия Лобачевского, которая до сих пор не

*) G. Herglotz „Ueber den von Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr" zu bezeichnenden Körper", Annalen der Physik. 4 Folge B. 31. pp. 393—415

**) M. Born. „Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips". Annalen der Physik. 4 Folge B. 30 pp. 1—46.

***) Сборник «Новыя идеи в математике». № 5.

имела никакого значения для физических теорий, должна играть важную роль в специальном принципе относительности. Это обстоятельство может показаться несколько странным, ибо различие между механикой Einstein'а и механикой Ньютона заключается только в том, что в первой скорость света считается абсолютно постоянной, но как в той, так и в другой предполагается, что явления окружающей нас природы происходят в пространстве Евклида. Естественно возникает вопрос: почему же, не смотря на то, что в основание как механики Einstein'а, так и механики Ньютона положено пространство Евклида, до сих пор при изучении классической механики, на протяжении столетий, никогда не ощущалось потребности ни в каких других геометрических построениях кроме тех, которым учит нас Геометрия Евклида, между тем как не прошло и пяти лет после опубликования мемуара Einstein'а, как появились вполне определенные указания на то, что Геометрия Лобачевского является весьма подходящим орудием для изучения механики Einstein'а?

Мы получим ответ на этот вопрос, если с одной стороны обратимся к той изящной Геометрической интерпретации, которую ввел в принцип относительности Г. Минковский, а с другой воспользуемся проективной Геометрией и теорией мероопределения, развитой A. Cayley и F. Klein'ом в их классических мемуарах.

Пусть x,y,z, обозначают прямоугольные координаты пространства, а t—время. «Предметом нашего восприятия», говорит Г. Минковский **), «являются всегда места и времена, связанные между собой. Никто не замечал места иначе как в определенное время, и не замечал времени иначе как в определенном месте». Назовем систему значений x,y,z,t «мировой точкой». Многообразие всех мыслимых мировых точек x,y,z,t Г. Минковский называет «миром». Мир Г. Минковского это пространство четырех измерений.

Какова же структура этого пространства? Будет ли оно пространством постоянной кривизны, и если оно постоянной кривизны, то принадлежит ли оно к типу пространств Евклида, Римана или Лобачевского? Сказанное мною выше о значении Геометрии Лобачевского для принципа относительности может пожалуй внушить мысль, что этот мир Минковского и есть пространство Лобачевского. Такая догадка была бы однако несколько поспешной: мир Минковского это пространство Евклида, но только осоого вида. Как в нашем обыкновенном Евклидовом пространстве могут быть поверхно-

*) Г. Минковский «Пространство и время». Новые идеи в математике, Сборник № 5.

сти постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны, так и в мире Минковского 4-х измерений могут быть построены 3-х мерные пространства любой постоянной кривизны и то пространство Лобачевского, которое играет такую выдающуюся роль в принципе относительности, должно находиться где то в 4-хмерном мире Г. Минковского.

Но где же именно?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны припомнить некоторые основные положения теории мероопределения.

3. С начала XVII столетия, со времени появления Геометрии Декарта, преобладающее значение получила Аналитическая Геометрия, которая позволяла все свойства фигур, будут ли то свойства метрические или проективные, изучать при помощи Декартова метода координат. Этот метод, благодаря его универсальности и могуществу, привлек к себе внимание геометров и, опираясь на основные метрические понятия, давал возможность положить их в основание всей геометрии. Отодвинув т. о. на задний план изучение проективных свойств фигур, Аналитическая геометрия расширила наши геометрические представления введением понятия о мнимых точках, линиях и поверхностях и подготовила почву для дальнейшего развития проективной Геометрии. Мало по малу проективные свойства фигур снова стали привлекать к себе внимание геометров; их значение в геометрии увеличивалось все более и более пока, наконец, во второй половине прошлого столетия взгляд на роль в геометрии метрических и проективных свойств не изменился. В эту эпоху стало совершенно ясно, что подобно тому, как Декартова Геометрия дает возможность свести все свойства фигур к свойствам метрическим, так проективная дает возможность проективные свойства положить в основание всей геометрии. Но при этом обнаружилось, что, изучая с точки зрения проективной геометрии метрические свойства какой либо фигуры, мы должны вместе с ней разсматривать еще и другую фигуру постоянную, неизменную, неподвижную, одну и ту же во всех случаях, которую называют абсолютом. Исключительно абсолютом обусловливаются метрические свойства пространства.

Постараюсь об'яснить, что служит абсолютом Евклидова пространства.

Давно уже было замечено, что многие, повидимому различные теоремы Геометрии, становятся тожественными, делаются видоизменениями одной и той же теоремы, если мы будем представлять себе, что параллельные между собой линии все сходятся в одной и той же безконечно удаленной точке, и будем считать, что все безконечно удаленные точки одной и той же плоскости лежат на одной и той же безконечно удаленной прямой линии и все безконечно удаленные точки пространства образуют безконечно удаленную плоскость.

При такой точке зрения на каждой прямой линии есть только одна безконечно удаленная точка, в которой она пересекает безконечно удаленную плоскость. Основное метрическое понятие, связанное с прямой линией, разстояние между двумя ее точками, разсматривается в проективной геометрии как свойство фигуры образованной тремя точками: двумя данными и безконечно удаленной точкой прямой. Эта последняя и образует абсолют прямой линии Евклидова пространства.

Далее геометры обратили внимание на то, что разнообразные кривые, которые мы получаем, разсекая поверхность круглого конуса плоскостью, так наз. конические сечения, легко поддаются простой классификации, если мы воспользуемся безконечно удаленной прямой плоскости.

Дело в том, что со всякой прямой, в том числе и с безконечно удаленной, всякое коническое сечение пересекается в двух точках, но эти две точки могут быть различны, могут сливаться в одну, когда прямая касается конического сечения, и наконец будут мнимы, когда прямая с коническим сечением вовсе не встречается.

Если коническое сечение пересекается с безконечно удаленной прямой в двух действительных точках, то оно имеет вид гиперболы, если оно встречается с безконечно удаленной прямой в двух совпадающих точках, т. е. касается с ней, то оно обращается в параболу. Наконец коническое сечение третьяго типа, эллипс, пересекается с безконечно удаленной прямой в двух мнимых точках. Круг есть частный случай эллипса и мы должны следовательно сказать, что и он пересекается с безконечно удаленной прямой в двух мнимых точках.

Ряд геометрических фактов заставляет нас считать, что все круги плоскости пересекают безконечно удаленную прямую в одних и тех же двух мнимых точках, которые и принято называть поэтому круговыми точками.

Работы французской школы геометров первой половины прошлого столетия выяснили, что основные метрические понятия плоскости самым тесным образом связаны с безконечно удаленной прямой и мнимыми круговыми точками на ней. Разстояние между двумя точками A и B, угол между двумя прямыми l и m рассматриваются в проективной геометрии как свойства тех фигур, которые мы получим, присоединив к точкам A и B, или к прямым l и m круговые точки. Эти последние вместе с безконечно удаленной прямой и образуют абсолют Евклидовой плоскости.

Подооным же образом оказалось, что при изучении геометрии трехмерного пространства полезно представлять себе, что все шаровые поверхности пересекаются с безконечно удаленной плоскостью по одному и тому же мнимому кругу, который поэтому называют шаровым кругом. С точки зрения проективной геометрии метрические свойства какой либо фигуры суть свойства сложной фигуры, составленной из нея и шарового круга. Этот круг вместе с безконечно удаленной плоскостью, в которой он лежит, и служат абсолютом Евклидова пространства трех измерений.

4. Дальнейший шаг в развитии этих идей был сделан английским математиком A. Cayley *). Он дал по его словам „теорию разстояний" или, как принято теперь говорить, „теорию мероопределения" Эта теория заключается в том, что мы можем, вводя основные метрические понятия, взять за абсолют прямой линии не одну точку, а две, за абсолют плоскости не безконечно удаленную прямую с круговыми точками на ней, а любое коническое сечение. Обобщенная таким образом геометрия прямой линии обращается в геометрию Евклидовой прямой, когда две точки абсолюта сливаются в одну. Обобщенная же геометрия плоскости превращается в геометрию Евклидовой плоскости или в геометрию сферы, если коническое сечение принятое за абсолют обращается в пару круговых точек или становится мнимым.

Сам A. Cayley, набросав в своем мемуаре на нескольких страницах теорию мероопределения, не останавливается на дальнейшем ее развитии и не касается следствий, из нея вытекающих. А между тем эти следствия имеют весьма большое значение для всей Геометрии.

Первым, обратившим внимание на значение небольшего мемуара A. Cayley, был F. Klein **). Упростив математическую сторону теории мероопределения, F. Klein показывает, что не только Геометрия Евклида и Геометрия сферы, но и Геометрия Риманна и Лобачевского укладываются в геометрическую схему A. Cayley. Все различие гео-

---

*) „A sixth memoir upon quantics". Phil. Trans. of the Royal Society of London. Vol. CXLIX p. 61—90.

**) „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie". M. A. B. IV, p. p. 573—625.

метрии плоскости Евклида, Риманна и Лобачевского обусловливается различием абсолютов этих трех типов плоскостей. Мы уже видели, что абсолютом Евклидовой плоскости служит прямая с двумя мнимыми точками на ней. Если же за абсолют мы примем коническое сечение, то получим плоскость Риманна, когда оно будет мнимым, и плоскость Лобачевского, когда оно—действительно.

Теория мероопределения A. Cayley может быть распространена и на пространство трех измерений Если мы за абсолют примем не шаровой круг, а поверхность второго порядка, то получим или Геометрию Лобачевского, или Геометрию Раманна, смотря по тому, будет ли поверхность действительной или мнимой.

Надо однако заметить, что теория мероопределения дает возможность не только просто классифицировать уже хорошо изученные типы пространств, она идет гораздо дальше и позволяет строить схемы и новых пространств, еще не изученных. До сих пор математики мало обращали на них внимания, т. к. ни в самой Геометрии, ни в других науках в них не встречалось надобности. Но принцип относительности, его геометрическая интерпретация, предложенная Г. Минковским, заставляет нас создать, пользуясь теорией мероопределения, новые пространства, которые до сих пор еще не изучались, но которые должны теперь обратить на себя внимание Геометров.

5. Обращаясь к построению мира Г. Минковского и мира Ньютона, мы всегда в дальнейшем будем предполагать, что все наши построения происходят в пространстве проективном, в котором имеют место аксиомы проективной Геометрии.

Мы должны будем теперь войти в некоторые подробности теории мероопределения. Начнем с Геометрии прямой линии.

Для того, чтобы установить метрику прямой линии, мы должны иметь средство построить на прямой шкалу, откладывая по ней один за другим равные отрезки. Мы будем иметь возможность выполнить эту операцию, если на прямой нам будет задана квадратичная инволюция, которую мы будем называть абсолютной инволюцией и обозначать буквой J. Ея двойные точки образуют абсолют прямой.

Когда инволюция J задана, и мы имеем на прямой две точки A и B, то для того, чтобы от точки B отложить отрезок равный AB, находим точку B_1, соответствующую точке B в абсолютной инволюции J, и строим точку D, гармонично сопряженную с A относительно точек B и B_1 : отрезок BD считается равным отрезку AB. Также построим отрезок DE равный BD, отрезок EF равный DE и т. д. и мы получим шкалу, которая и может служить для измерения разстояний между двумя точками прямой.

Характер метрики, таким образом установленной на прямой, будет зависить от рода абсолютной инволюции.

Если абсолютная инволюция параболическая и ея двойные точки совпадают в одну C, то в построенной параболической шкале $ABDE\ldots C$ каждые три рядом стоящие точки образуют с точкой C гармоническую систему. В этом случае, будем-ли мы откладывать отрезки равные AB в сторону точки B или в сторону точки A, мы будем приближаться к точке C, никогда ея не достигая: у прямой будет одна безконечно удаленная точка C. Прямую, на которой нанесено такая шкала мы будем называть Евклидовой прямой (E). Абсолютом ее служит безконечно удаленная точка C.

Разстояние u между двумя точками GF будет определяться формулой

$$u=(COEG)-(COEF) \qquad (1),$$

где O есть начало шкалы и E единичная точка.

Если абсолютная инволюция J гиперболическая и двойные ее точки C и C_1 действительны и не совпадают, то, откладывая отрезок AB в сторону точки B, мы будем приближаться к одной из двух точек C или C_1, а откладывая его в сторону точки A—к другой. Но ни в том, ни в другом случае, как бы далеко мы ни продолжали этот процесс, мы никогда не дойдем ни до точки C, ни до точки C_1: у прямой будут две безконечно удаленные точки C и C_1 Прямую, на которой нанесена такая гиперболическая шкала мы будем называть прямой Лобачевского $(Л)$. Ее абсолютом служат точки C и C_1.

Точки C и C_1 делят всю прямую на две части. Устанавливая метрику прямой Лобачевского, мы предполагали, что точки A и B лежат на одной и той же части, т. е. что пары точек A и B, C и C_1 не разделяют одна другую. Часть прямой, на которой лежат точки A и B, мы назовем реальной, другую же часть идеальной.

Разстояние между двумя точками G и F определяется в этом случае формулой:

$$u=\frac{1}{2к}lg(CC_1GF) \qquad (2),$$

в которой мы будем полагать $к=1$.

Наконец, если абсолютная инволюция J будет эллиптической и ее двойные точки мнимыми, то после конечного числа операций откладывания отрезка AB, мы заполним всю прямую: прямая будет иметь конечную длину. Мы будем называть ее прямой Риманна *(R.)* и нанесенную на ней шкалу эллиптической. Абсолютом прямой Риманна служат мнимые двойные точки инволюции J.

Разстояние u между точками F и G определяется в этом случае формулой

$$u = \operatorname{arctg}(COEG) - \operatorname{arctg}(COEF) \qquad (3),$$

где C, O, E могут быть выбраны произвольно.

Формулы *(1)* и *(3)* могут быть разсматриваемы как частные случаи *(2)*, когда точки C и C_1 совпадают или делаются мнимыми.

6. Для изучения явлений, происходящих вдоль одной и той же прямой линии, мы должны иметь две координаты—одну пространства x, а другую времени t, и для геометрической интерпретации этих явлений мы должны построить пространство двух измерений.

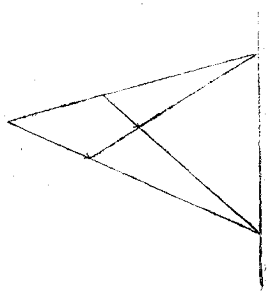
Мы построим Евклидову плоскость.

Возьмем в проективной плоскости произвольную прямую и назовем ее безконечно удаленной прямой и построим в плоскости сначала аффинную Геометрию, опираясь на следующие определения.

Определение 1. Прямые, которые пересекаются в одной и той же точке безконечно удаленной прямой, называются параллельными.

Определение 2. Четыреугольник, у которого противоположные стороны параллельны, называется параллелограммом.

Определение 3. Два вектора наз. равными, если, соединяя их начала и концы, мы получим параллелограмм.



Чертеж 1.

Теорема *Desargues'a* дает возможность легко показать, что два вектора, порознь равные третьему, равны между собой, и затем распространить определение равных векторов на тот случай, когда они лежат на одной и той же прямой линии.

При помощи определения 3 через каждую точку можно провести вектор равный данному и следовательно построить геометрическую сумму какого угодно числа векторов. Сумма не будет зависить от точки, из которой начато сложение векторов, и потому очевидно, что операция сложения будет ассоциативна. Она будет также и коммутативна, ибо сложение двух векторов приводится к построению диагонали параллелограмма, стороны которого равны слагаемым векторам.

Определение 3 дает возможность, откладывая на прямой равные отрезки, построить шкалу, которая может служить для измерения разстояния между точками этой прямой. Нетрудно видеть, что эта шкала будет параболической тожественной с той, которую мы строили на прямой при помощи параболической инволюции: у шкалы будет только одна безконечно удаленная точка, а именно точка пересечения прямой с безконечно удаленной прямой. Самая прямая будет Евклидовой прямой.

Итак все прямые плоскости будут Евклидовыми прямыми и все безконечно удаленные точки их будут лежать на безконечно удаленной прямой.

Шкалу, нанесенную на какой нибудь прямой, можно перенести на любую прямую параллельную с первой и таким образом измерить отрезок между двумя точками, если он параллелен шкале. Но первые три определения не дают нам возможности сравнивать между собой отрезки на параллельных прямых не лежащие. Сравнение таких отрезков становится возможным только тогда, когда на безконечно удаленной прямой нам будет задана квадратичная инволюция, которую назовем абсолютной, и к первым трем определениям мы добавим еще четвертое.

Определение 4,*a*. Отрезки, соединяющие точки конического сечения сопряженного с абсолютной инволюцией и полюс безконечно удаленной прямой, равны.

Это определение дополняет определение 3 и ему не противоречит: всегда два отрезка, порознь равные третьему, равны между собой.

Если мы хотим, пользуясь определением 4,*a* на прямой OV, проведенной через точку O отложить отрезок равный OE, то мы можем поступать таким образом. Пусть V и U суть точки пересечения прямых OV и OE с безконечно удаленной прямой и D и D_1 пара точек абсолютной инволюции, которые делят гармонически точки U и V. Прямые DE и D_1E пересекут прямую OV в точках F и F_1, и мы будем иметь $OF=OF_1=OE$.

Точки D и D_1 всегда будут действительны, и предыдущее построение будет выполнимо, если абсолютная инволюция будет эллиптической или параболической. Если же она будет гиперболической и притом двойные ее точки C и C_1 будут разделять точки U и V, то определение 4,*a* мы должны дополнить определением пятым.

Определение 4,*b*. Пусть U и U образуют пару точек абсолютной инволюции. Прямая, проведенная через двойную точку C или C_1 абсолютной инволюции отсекает на прямых OU и OU_1 равные отрезки OE и OE_1.

Последние два определения не противоречат одно другому и дают возможность на любой прямой отложить отрезок равный данному и таким образом измерять все отрезки одной и той же единицей.

Перейдем теперь к другому основному метрическому понятию, к углу между двумя прямыми линиями; при этом мы будем называть концом какой нибудь прямой линии точку пересечения ея с безконечно удаленной прямой.

Естественно считать два угла, заключенные между соответственно параллельными сторонами, равными. Поэтому величина угла будет зависить только от положения концов его сторон, и мы дадим следующее определение.

Определение 5. Угол между двумя прямыми равняется разстоянию между концами его сторон, измеренному той шкалой, которую определяет на безконечно-удаленной прямой абсолютная инволюция.

Итак мы видим, что абсолютная инволюция позволяет нам измерять как расстояния между точками, так и углы между прямыми и развить метрическую Геометрию на плоскости.

Построенную указанным способом Геометрию мы называем Евклидовой, ибо в ней на каждой прямой есть только одна безконечно удаленная точка, иначе говоря, через каждую точку плоскости можно провести только одну прямую параллельную данной.

7 Характер этой Геометрии будет однако различен в зависимости от рода абсолютной инволюции, от двойных точек ее, которые вместе с безконечно удаленной прямой образуют абсолют Евклидовой плоскости.

Если абсолютная инволюция и шкала, которую она определяет на безконечно удаленной прямой, будут эллиптическими, то мы будем иметь обыкновенную Евклидову Геометрию. Мы могли бы сказать, что абсолютом ея служит Риманнова прямая и назвать ее Риманно-Евклидовой (RE).

Если абсолютная инволюция будет параболической, ее двойные точки сливаются в одну C, то безконечно удаленная прямая будет Евклидовой прямой. Плоскость с таким абсолютом можно было бы поэтому назвать Евклидо-Евклидовой (EE). Мы могли бы назвать ее и Ньютоновым миром двух измерений или Ньютоновой плоскостью, ибо эту плоскость мы получаем, когда хотим интерпретировать Ньютоно-Галилееву механику прямолинейного движения при помощи мира (x, t). При сравнении Ньютоновой механики с принципом относительности мы должны Геометрии этой плоскости уделить некоторую долю нашего внимания.

Конические сечения, сопряженные с параболической абсолютной инволюцией, или касаются безконечно удаленной прямой в точке C, или распадаются на пары прямых, проходящих через C. Из определения 4,a поэтому следует, что отрезки, концы которых лежат на двух прямых, проведенных через C, равны между собой, и для измерения всех отрезков плоскости нам достаточно построить только одну параболическую шкалу на произвольно взятой прямой Ot, не проходящей через C. Разстояние между двумя точками A и B будет равно разстоянию между их проекциями A и B, на шкалу Ot из точки C.

Измеренное таким образом разстояние между двумя точками во избежание недоразумения можно было бы назвать промежутком между ними.

Из сказанного следует, что промежуток между точками равен нулю, если прямая, их соединяющая, проходит через точку C.

Угол, образованный двумя прямыми, измеряется отрезком между концами его сторон при помощи абсолютной параболической шкалы, которую определяет на безконечно удаленной прямой абсолютная инволюция. Прямые проведенные через точку C перпендикулярны ко всем другим прямым плоскости и образуют с ними безконечно-большой угол.

Для изучения этой Геометрии введем проективные ангармонические координаты, взяв за ось x какую нибудь прямую, проходящую через точку C, и за ось t произвольную прямую. Проекции e_1, e_2 и единичной точки E из вершин треугольника OtC на противоположные стороны его определяют нам отрезки Oe_1, Oe_2, t, которые мы примем за единицы параболических шкал на безконечно удаленной прямой и на осях xot. Координаты точки A будут

$$x = t(COEA) = (COe_1A_1)$$
$$t = C(tOEA) = (tOe_2A_2)$$

Составим прежде всего формулы преобразования координат. Возьмем новую систему координат: изменив ось t', совместим новую ось x' со старой x и оставим единицы масштабов на осях x' и t' без изменения, т. е. за единичную точку E' возьмем точку, в которой пересекаются прямыя $t'e_1$ и CEe_2. Тогда координата t точки A не изменится

$$t' = C(t'OE'A) = C(tOEA) = t$$

Замечая, что по свойству пяти точек

$$t(COEA).\ C(OtEA).\ O(tCEA) = 1,$$

мы имеем

$$x/t = O(CtEA) = (Ct\nu A_0)$$

или $$x/t=w,\ x=wt.\qquad (4)$$
где $w=(Ct\mu A_0)$ есть угол между осью t и радиусом вектором OA, т. е. длина отрезка tA_0, измеренная на абсолютной шкале единицей $t\mu$.

Подобным же образом из треугольника $t'oC$ мы находим

$$x'/t=0(ct'\varepsilon'A)=(ct'\mu'A_0)$$

или $$x'/t'=w',\quad x'=w't',$$

где w' равняется углу $t'0A_0$ или отрезку $t'A_0$, измеренному новой единицей $t'\mu'$ абсолютной шкалы. Но из чертежа видно, что отрезки $t\mu$ и $t'\mu'$ равны, следовательно на безконечно удаленной прямой единица осталась без изменения. Потому

$$tA_0=tl_1+t'A_0$$

или, обозначая угол между осями t и t', иначе говоря длину отрезка tt' через v,

$$x/t=x'/t'+v.$$

Т. о. формулы преобразования будут

$$x=x'+vt',\ t=t'.\qquad (5)$$

Если мы будем в построенной нами Геометрии рассматривать t как время, а x как координату, определяющую положение точки на оси x, то каждому событию (x,t) будет соответствовать в плоскости точка $A(x,t)$. Возьмем две точки A и B (x_1,t_1). Как было сказано выше, промежуток между точками A и B равняется расстоянию между проекциями их A_2 и B_2 на ось t. По формуле (1) это расстояние равняется

$$(tOe_2B_2)-(tOe_2A_2)=t_1-t.$$

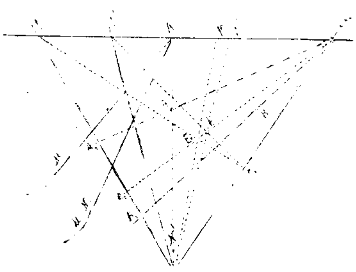
То, что мы назвали промежутком между двумя точками, представляет собой следовательно промежуток времени между двумя событиями, изображаемыми этими точками.

Когда мы рассматриваем t как время и x как координату движущейся по оси x точки, то выведенные выше формулы преобразования координат представляют собой так называемое Ньютоно-Галилеево преобразование, соответствующее переходу от одной системы отсчета к другой, движущейся по отношению к первой со скоростью v.

Из предыдущего ясно, что промежуток времени между двумя событиями не будет зависить от системы отсчета и события одновременные в одной системе будут одновременны и в другой.

Закон движения точки по оси x, $x = f(t)$, представится некоторой мировой линией. Проведем в какой нибудь точке ее касательную MA_0 и на этой последней возьмем безконечно малый элемент MN (dx, dt).

Если этот элемент мы перенесем параллельно самому себе и поместим точку M в начало координат, то получим вектор ON', координаты конца которого, точки N', будут (dx, dt). По формуле (4) мы получим



Чертеж 2.

$$\frac{dx}{dt} = (ct\,\mu A_0) = w \qquad (6)$$

скорость движения точки (x).

Допустим, что касательная к другой мировой линии в какой нибудь ее точке M_1 (x_1, t_1) пересекает безконечно удаленную прямую в той же точке A_0. В таком случае скорости двух точек, движение которых определяется двумя различными мировыми линиями в момент t для первой и в момент t_1 для второй, будут равны между собой. Кроме того, так как мировая линия остается неизменной, какова бы ни была система отсчета, то при переходе к новой системе точка A_0 не меняет своего положения и следовательно мы можем сказать, что существует однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта, которое остается неизменным, к какой бы системе отсчета мы ни относили движение.

Формула (6) показывает нам, что скорость точки равна отрезку безконечно удаленной прямой, заключенному между концом оси времен и точкой, соответствующей скорости.

Если то же движение точек m и m_1 мы отнесем к системе отсчета (x', t'), то общая их скорость в рассматриваемый момент представится вектором $t'A_0$ и будет равна

$$w' = (ut'\mu' A_0) = t'A_0.$$

Но $$tA_0 = tt' + t'A_0$$

и потому $$w = w' + v,$$

где $tt' = v$ равняется скорости второй системы отсчета относительно первой. Это равенство выражает закон сложения скоростей.

Полученные нами результаты убеждают нас в том, что метрические свойства фигур построенной нами плоскости представляют собой геометрическую интерпретацию при помощи мира двух измерений Ньютоно-Галилеевой механики прямолинейного движения точки.

Итак абсолютом мира Ньютона двух измерений служит Евклидова прямая.

8. Если абсолютная инволюция будет гиперболической и ее двойные точки действительны, то бесконечно удаленная прямая будет прямой Лобачевского. В этом случае плоскость можно назвать Лобачевско-Евклидовой или миром Минковского двух измерений; к ней мы должны прибегнуть, если захотим графически представить прямолинейное движение точки, следующей законам принципа относительности.

Мы условимся говорить, что прямая плоскость имеет реальное, идеальное или абсолютное направление, смотря по тому, будет-ли конец ее точкой реальной, идеальной или совпадать с одной из двойных точек абсолютной инволюции. Две прямые перпендикулярны, если концы их образуют пару соответствующих точек абсолютной инволюции; угол между двумя взаимно перпендикулярными прямыми по формуле (2) равняется $\frac{\pi i}{2}$. Все прямые плоскости с абсолютным направлением образуют бесконечно большой угол.

Примем сначала за координатные оси ξ, η две прямые OC и OC_1, имеющие абсолютное направление, и за единичную точку произвольную точку E. Ту часть бесконечно удаленной прямой, на которую падает проекция точки E из точки O, будем считать реальной. Проведем через какую нибудь точку A прямую OAA_0 и отложим на ней отрезок OE_1 равный отрезку OE. Для координат точки A мы имеем

$$\xi = C(C_1OEA) = C(C_1OEE_1).C(C_1OE_1A) = C(C_1OEE_1).(A_0OE_1A)$$

$$\eta = C_1(COEA) = C_1(COEE_1).C(COE_1A) = C_1(COEE_1).(A_0OE_1A).$$

По определению 4 точки C, C_1, E, E_1, лежат на одном и том же коническом сечении, которое касается в точках C и C_1 прямых OC и OC_1, и потому на основании известного свойства конического сечения

$$(CC_1EE_1) = C(OC_1EE_1) = C_1(COEE_1),$$

откуда $$C(C_1OEE_1).C_1(COEE_1) = 1$$

и следовательно $$\xi\eta = (A_0OE_1A)^2.$$

При выводе этого равенства мы предполагали, что прямые EO и OX не разделяются прямыми OC и OC_1. Если же направление линии OA будет идеально, то отрезок OE мы должны перенести на OA, пользуясь определением 6, и тогда мы получим

$$\xi\eta=(A_0OEA)^2.$$

Мы можем различать 3 величины, связанные с двумя точками O и A.

1. Величину

$$T=\sqrt{\xi\eta}$$

мы назовем собственным промежутком между точками O и A. Из сказанного мы видим, что она действительна, когда направление OA реально, чисто-мнима, когда направление OA идеально, и равна нулю, когда направление OA абсолютно.

2. Величину $ciT=ci\sqrt{\xi\eta}$ назовем собственным расстоянием между точками O и A. Она действительна, когда собственный промежуток мнимый и обратно.

3. Модуль числа $T=\sqrt{\xi\mu}=(A_0OE_1A)$ назовем длиной отрезка OA.

Таким образом промежуток между точками O и A всегда определяется равенством

$$T^2=\xi\eta. \tag{7}$$

Далее по свойству пяти точек из треугольника CC_1O мы имеем

$$C(C_1OEA).C_1(OCEA).O(CC_1EA)=1$$

или

$$\xi/\mu=e^{-2\varphi}, \tag{8}$$

где

$$\varphi=\frac{1}{2}lg(CC_1\mu A_0)$$

равняется отрезку μA_0, измеренному абсолютной шкалой Лобачевского, или, иначе говоря, углу, который прямая OA составляет с прямой OE. Ангармоническое отношение $(CC_1\mu A_0)$ будет величиной положительной и φ действительной, когда направление OA реально. Если же направление OA будет идеально, то $(CC_1\mu A_0)$ будет отрицательно и

$$\varphi=\frac{\pi i}{2}+\frac{1}{2}lg\,(CC_1\mu A'_0)=\frac{\pi i}{2}+\varphi_0,$$

где A_0' есть точка сопряженная с A_0 в абсолютной инволюции и φ^0 величина действительная.

Из (7) и (8) получаем основные формулы

$$\begin{aligned}\xi&=Te^{-\varphi}\\ \eta&=Te^{+\varphi}.\end{aligned} \tag{9}$$

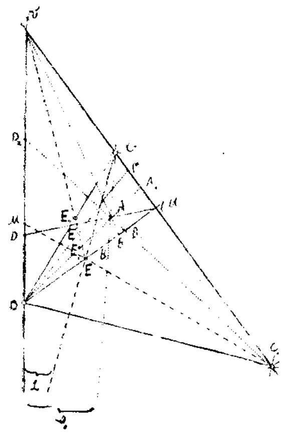
Перейдем теперь от этой системы координат к ортогональной системе, одна ось которой t, совпадает с прямой OE и пересекает безконечно удаленную прямую в точке U, а другая ось x, перпендикулярна к оси t и имеет своим концом точку V сопряженную с T

в абсолютной инволюции. За единичную точку возьмем точку E_0, в которой VE пересекается с осью η. Если спроектируем гармоническую систему CC_1UV из точки A на новые оси x и t, то получим две гармонические системы B_1B_2UB и D_1D_2DV и следовательно

$$(UBB_1B_2)=(VDD_1D_2)=-1. \qquad (10)$$

Из чертежа мы усматриваем

$$\xi=C(C_1OEA)=(UOEB_1)$$
$$\eta=C_1(COEA)=(UOEB_2)$$
$$t=V(UOE_0A)=(UOEB)$$



Чертеж 3.

и вследствие соотношений (10) имеем

$$\frac{\eta-t}{\xi-t}=-1.$$

откуда $$t=\frac{\xi+\eta}{2}.$$

Подобным же образом, проектируя гармоническую систему CC_1UV из точки E на ось x, получаем гармоническую систему $LMOV$

$$(VOLM)=-1$$

и по чертежу имеем

$$\xi=C(C_1OEA)=(VOLD_1)=(VOLM)(VOMD_1)=(VOMD_1)$$
$$\eta=C_1(COEA)=(VOMD_2)$$
$$x=U(VOE_0A)=(VOMD)$$

и затем вследствие соотношений (10)

$$\frac{\eta-x}{-\xi-x}=-1,$$

откуда

$$x=\frac{\eta-\xi}{2}.$$

Если бы за единичную точку мы взяли точку E', лежащую на прямой VE, но не лежащую на абсолютной прямой OC, то для x мы получили бы

$$x=U(VOE'A)=U(VOE'E_0)U(VOE_0A)=(VEE'E_0)(VOMD)$$
$$x=(VU\mu C)(VOMD)$$

или $$x/c=(VOMD),$$

где $$c=(VU\mu C)$$

и c^2 есть степень абсолютной инволюции. В этом случае вместо (12) мы имели бы

$$x/c=\frac{\eta-\xi}{2}. \qquad (13)$$

Из формул (9) (11) (13) получаем

$$t = T ch\varphi,\quad x = cT sh\varphi$$
$$x/t = c.th\varphi,\quad T^2 = t^2 - x^2/c^2. \qquad (14).$$

Помощью этих формул нетрудно получить формулы для перехода от системы осей Oxt к другой ортогональной системе $x'Ot'$, ось которой t' образует угол u с осью t. Означив через φ' угол между осью t' и вектором OA, по предыдущим формулам мы имеем

$$t' = T ch\varphi',\quad x' = cT sh\varphi',$$

но $\varphi' = \varphi - u$ и потому

$$t' = T ch(\varphi - u) = T ch\varphi\, chu - T sh\varphi\, shu,$$
$$x' = cT sh(\varphi - u) = cT sh\varphi\, chu - cT ch\varphi\, shu$$

или

$$t' = t\, chu - x'/c\; shu$$
$$x'/c = \frac{x}{c} chu - t\, shu. \qquad (15)$$

Будем теперь рассматривать t как время и x как координату точки, находящейся на оси x. Тогда каждому событию, совершающемуся в точке (x) в момент t, будет соответствовать на плоскости мировая точка $A(x,t)$ и свойства фигур построенной Геометрии будут представлять собой геометрическую интерпретацию законов механики точки, движущейся прямолинейно. Мы будем иметь механику Einstein'a. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько примеров.

Если в формулах преобразования координат (15), мы положим

$$v/c = thu,$$

то оне превратятся в формулы

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\quad t' = \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

преобразования Лоренца, соответствующего переходу от одной системы отсчета (x, t) к другой (x', t'), движущейся по отношению к первой со скоростью v.

Закон движения точки m по оси x, $x = f(t)$ представится мировой линией. Проведем в точке $M(x, t)$ к этой линии касательную MA_0, на ней возьмем безконечно малый элемент MN, (dx, dt) и перенесем его параллельно самому себе в положение ON так, чтобы точка M упала в O. Тогда координаты точки N будут dx, dt и, означив через $d\tau$ собственный промежуток между точками M и M_1, по формулам (14) будем иметь

$$\frac{dt}{d\tau} = ch\varphi,\quad \frac{dx}{d\tau} = c.sh\varphi,\quad d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}} \qquad (16)$$

и для скорости точки m мы получим

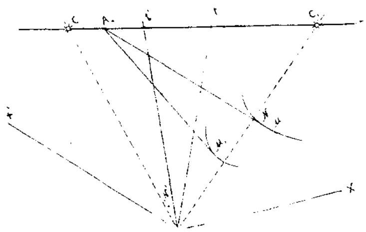
$$w = \frac{dx}{dt} = c.th\varphi, \qquad (17)$$

где φ=углу, который касательная MA_0 образует с осью t, иначе говоря, φ=отрезку tA_0, измеренному абсолютной шкалой.

Первая группа формул показывает нам, что собственный промежуток между точками M и M_1 равняется элементу собственного времени движущейся точки m. Чтобы уяснить важное значение последней формулы, вообразим другую точку m_1, движущуюся вдоль оси x по другому закону, который характеризуется мировой линией M_1. Если касательная к этой линии в какой нибудь ее точке $M_1(x_1,t_1)$ пересекается с касательной MA_0 к мировой линии первой точки m на безконечно удаленной прямой в точке A_0, то, как показывает формула (17), скорости точек m и m_1 первой в момент t, второй в момент t_1 будут равны. Поэтому одной и той же скорости будет соответствовать одна и та же точка абсолюта. Но вид мировой линии, характеризующей движение точки, всегда остается одним и тем же независимо от системы отсчета, а потому от системы отсчета положение точки A_0 также не зависит.

Т. о. можно установить однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта: каждой скорости, к какой бы системе отсчета мы ее не относили, всегда соответствует одна и та-же точка абсолюта.

Формула (17) показывает нам, что скорость точки m в системе отсчета (x, t) может быть представлена вектором tA_0 между концом оси времен, t, и точкой A_0, которая соответствует скорости; величина скорости пропорциональна гиперболическому тангенсу длины этого отрезка, измеренной абсолютной шкалой.



Чертеж 4.

Так как $tC = tC_1 = \infty$, то двойным точкам абсолютной инволюции будет соответствовать скорость $w = c$, т. е. скорость света, и мы могли бы поэтому назвать их световыми точками, а относительно безконечно удаленной прямой Лобачевского сказать, что абсолютом ее служит пара световых точек. Гиперболический тангенс для действительных значений аргумента меньше единицы и делается больше единицы для аргумента $\frac{\pi i}{2}+u_0$, а потому реальным точкам безконечно удаленной прямой будут соответствовать скорости меньшие скорости света, а идеальным—скорости большие света.

Точке t будет соответствовать скорость $w=c\,th0=0$, т. е. скорость самой системы отсчета (x,t).

Если мы отнесем движение к другой системе отсчета (x',t'), то в ней скорость v старой системы (x,t) и скорость точки m представятся векторами $t't=u$, $t'A_0=\varphi'$ и мы будем иметь

$$v=c\,th\,u,\ w'=c\,th\varphi'.$$

Так как $\varphi=\varphi'+u$, то

$$w=\frac{w'+v}{1+\frac{w'v}{c^2}}. \tag{18}$$

Мы получаем таким образом формулу сложения скоростей Einstein'а и видим, что сложение скоростей в принципе относительности приводится к сложению отрезков на прямой Лобачевского, которая служит абсолютом плоскости.

Проведем через пять точек: точку M, две безконечно близкие к ней точки мировой линии и световые точки соприкасающееся с мировой линией коническое сечение. Оно будет сопряжено с абсолютной инволюцией и потому полюс H безконечно удаленной прямой будет на основании определения 4-го находиться на равных расстояниях от всех его точек. Это коническое сечение играет следовательно роль соприкасающегося круга и радиус его ρ есть радиус кривизны мировой линии в точке M. Если в точке N, мировой линии безконечно близкой к точке M, мы проведем вторую касательную NA_0, то угол между этими касательными, угол смежности, будет $d\varphi=A_0A_0$, а отношение его к безконечно малому собственному расстоянию между точками MN_1, $cd\tau$: $\frac{d\varphi}{cd\tau}$ будет равно $1/\rho$—кривизне мировой линии

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{c}{\rho}.$$

С другой стороны $A_0A_0=d\varphi$ есть безконечно малое перемещение точки A_0, соответствующей скорости точки m за безконечно малый собственный промежуток времени $d\tau$, и $\frac{cd\varphi}{\varphi\tau}$ — производная от скорости взятая по собственному времени. Эту величину мы могли бы поэтому назвать абсолютным ускорением точки m и на основании предыдущей формулы мы нашли бы, что оно равно

$$j_a=\frac{c^2}{\rho} \tag{19},$$

т. е. квадрату скорости света, деленному на радиус кривизны мировой линии.

Диффенцируя равенства (16) и замечая, что $\frac{d\varphi}{d\tau}=c/\rho$, мы находим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{c^2}{\rho}ch\varphi\,, \quad c\frac{d^2t}{d\varphi^2}=\frac{c^2}{\rho}sh\varphi=\frac{d}{d\tau}\,(c\,ch\varphi).$$

Первая формула определяет ускорение в движении точки m, отнесенное к ее собственному времени, а вторая представляет производную от величины, которая будучи умножена на массу и скорость c, дает кинетическую энергию. Этим ур. можно дать геометрическое толкование: $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ и $\frac{d^2t}{d\tau^2}$ суть проекции на оси координат вектора $\frac{c^2}{\rho}$, отложенного по нормали к мировой линии.

Если в диф. ур. движения точки

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{dt}{d\tau}x$$

мы подставим значения $\frac{d^2x}{d\tau^2}$, $\frac{dt}{d\tau}$, то найдем, что сила движущая точку

$$x=m\frac{c^2}{\rho}=mj_a \qquad (20),$$

т. е. равна массе, помноженной на абсолютное ускорение, и пропорциональна кривизне мировой линии. Если сила постоянна, то и ρ постоянно и мировая линия обращается в коническое сечение, проходящее через световые точки. В этом случае точка m будет иметь так называемое гиперболическое движение, которое определяется ур.

$$x^2-c^2t^2=const.,$$

если начало координат поместим в центре мировой линии, т. е. в полюсе безконечно удаленной прямой. Когда световые точки совпадают в одну, мир Минковского обращается в мир Ньютона, мировая линия гиперболического движения превращается в коническое сечение, касающееся безконечно удаленной прямой в точке C (параболу) и гиперболическое движение обращается в равномерно ускоренное.

Приведенные примеры убеждают нас в том, что геометрические свойства фигур построенной плоскости дают нам законы механики Einstein'a, если мы рассматриваем как фигуры, устанавливающие связь между пространством и временем. Мы можем следовательно сказать, что мир Минковского двух измерений представляет собой Евклидову плоскость, абсолютом которой служит прямая Лобачевского.

Таким образом мы построили Евклидову плоскость трех типов (RE), (EE), ($ЛE$), отличающихся одна от другой их абсолютами (R), (E), ($Л$). Я не буду входить в дальнейшие подробности метрической Геометрии этих плоскостей. Замечу только, что некоторые тригонометрические формулы, которые легко получаются из (9) читатель найдет в моей работе «Проективная теория векторов» [1] в

[1] Известия Каз. Физ.-Мат. Общ. томы VIII и IX, 2 серия.

первой главе, посвященной теории комплексных чисел с двумя единицами. Эти теория представляет довольно подходящий инструмент для изучения различных типов Евклидовых плоскостей, причем каждому типу плоскости соответствует особый тип комплексных чисел.

9. Чтобы построить трехмерное Евклидово пространство, возьмем в трехмерном проективном пространстве R_3 какую нибудь плоскость P_2 и назовем ее безконечно удаленной плоскостью. Оставляя без перемены определения 2 и 3, заменим определение 1-ое следующим:

Определение 1. Прямые, которые пересекаются в одной и той же точке, плоскости, которые пересекаются по одной и той же прямой безконечно удаленной плоскости, называются параллельными.

Эти три определения дают возможность построить аффинную Геометрию. В ней все прямые будут Евклидовыми прямыми и все плоскости Евклидовыми плоскостями.

Чтобы установить метрику этого пространства, нам должно быть дано в безконечно удаленной плоскости коническое сечение K или полярное поле.

Это сечение K согласно теории мероопределения определяет геометрию безконечно удаленной плоскости. Оно вместе с тем определяет и метрические свойства всего пространства, ибо всякая плоскость Q пересекается с безконечно удаленной плоскостью по прямой. На этой прямой лежит сопряженная с коникой K инволюция, которая будучи принята за абсолютную инволюцию плоскости Q, определяет геометрию ее, а тем самым и геометрию всего пространства. Всякая плоскость пространства R_3 будет плоскостью одного из рассмотренных выше типов (RE), (EE), ($ЛE$), смотря по тому, будет-ли она пересекать конику K в мнимых, совпадающих или действительных точках.

Если коническое сечение будет мнимым, то безконечно удаленная плоскость будет плоскостью Риманна (R_2). Все же другие плоскости будут обыкновенными Евклидовыми плоскостями (RE). В этом случае мы имеем обыкновенную Евклидову Геометрию (RE). Ее можно было бы назвать Риманно-Евклидовой.

Если коническое сечение K вырождается в пару мнимых точек, лежащих на прямой R и определяющих на ней эллиптическую инволюцию, то безконечно удаленная плоскость будет обыкновенной Евклидовой (RE). В этом случае и все плоскости, проходящие через R, будут обыкновенными Евклидовыми (RE) с одной и той же общей им всем абсолютной инволюцией R. Всякая другая плоскость пересечется с прямой R только в одной точке; ее абсолютная инволюция будет параболической; следовательно сама плоскость будет Евклидо-Евклидовой (EE).

Т. о. в пространстве мы будем иметь пучек обыкновенных плоскостей (RE), проходящих через прямую R, одна из них будет безконечно удаленной плоскостью. Все же другие плоскости будут Ньютоновыми плоскостями (EE).

Если оси x и y возьмем таким образом, чтобы оне пересекали прямую R в сопряженных точках абсолютной инволюции, ось t возьмем произвольно, то плоскость xoy будет обыкновенной Евклидовой, плоскости же xot, yot—Ньютоновыми и геометрические свойства фигур пространства будут выражать законы механики Ньютона двух измерений. На этом основании мы можем назвать рассматриваемое пространство Ньютоновым миром трех измерений. Принимая же во внимание, что абсолютом для него служит обыкновенная Евклидова плоскость—Евклидо-Евклидовым пространством (REE).

10. Наконец, если коническое сечение K действительно, то безконечно удаленная плоскость будет плоскостью Лобачевского $Л_2$ и пространство может быть названо Лобачевско-Евклидовым ($Л_2E$). Оно представляет собой мир Минковского 3-х измерений, служащий для геометрической интерпретации движений, происходящих в Евклидовой плоскости согласно с принципом относительности.

Всякая плоскость этого пространства будет плоскостью одного из изученных нами трех типов в зависимости от того, пересекается ли она с коникой K в действительных, мнимых или совпадающих точках.

Всякая прямая пересекает безконечно удаленную плоскость в одной точке, в конце прямой. Возьмем ортогональную систему координат, концы осей которой t, x, y образуют автополярный треугольник. Если конец оси времен t—точка реальная, т. е. находится внутри коники K, то концы осей x и y будут идеальны и находятся вне коники K. При таком расположении осей плоскость xOy будет обыкновенной Евклидовой плоскостью (RE), плоскости же xOt и yOt будут типа ($ЛE$). Преобразование координат соответствует переходу от одного автополярного треугольника к другому.

Пусть точка m движется в Евклидовой плоскости и ее движение определяется ур. $x=f(t)$ и $y=f_1(t)$; эти ур. в трехмерном пространстве определяют мировую линию. Проведем к ней в какой нибудь точке (x, y, z, t) касательную, которая, положим, пересечет безконечно удаленную плоскость в точке A_0. Рассуждая совершенно так же, как и в случае прямолинейного движения, мы убедимся, что между скоростями и точками безконечно удаленной плоскости может быть установлено однозначное соответствие, которое не зависит от системы отсчета, и что скорость точки m может быть представлена вектором tA_0.

Если бы безконечно удаленная плоскость была обыкновенной Евликдовой и пространство миром Ньютона N_3, то скорость точки m была бы

$$w=\varphi,$$

где $\varphi=tA_0$=длине отрезка tA_0.

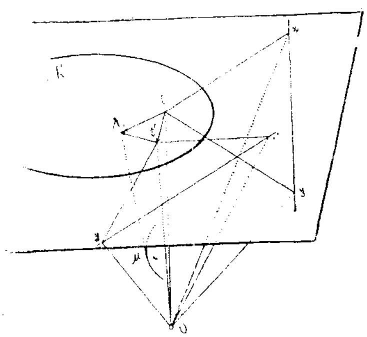
Когда же безконечно удаленная плоскость будет плоскостью Лобачевского и пространство—миром Минковского, то

$$w=c.th\varphi,$$

где φ также равно tA_0. В этом случае реальным точкам, лежащим внутри коники K, будут соответствовать скорости меньше, чем скорость света, точкам идеальным, лежащим вне коники K,—скорости больше скорости света и точкам, находящимся на K, скорости равные скорости света. Мы могли бы поэтому назвать конику K световой кривой или световым абсолютом безконечно удаленной плоскости Лобачевского $Л_2$.

Если движение точки m мы отнесем к другой системе отсчета (x', y', t'), то скорость ее в тот момент, который характеризуется точкой M, представится вектором $t'A_0$, скорость же системы (x', y', t') по отношению к системе (x, y, t) вектором tt'.

В том случае, когда движение происходит по законам Ньютоновой механики, безконечно удаленная плоскость есть Евклидова плоскость и треугольник A_0tt' будет половиной параллелограмма: скорости будут складываться по правилу параллелограмма. Если же движение происходит по законам принципа относительности, то безконечно удаленная плоскость есть плоскость Лобачевского и скорость точки m в системе (x', y', t') будет



Чертеж 5.

$$w'=c.th\varphi',$$

где $\varphi'=t'A_0$, скорость же системы (x', y', t') по отношению к системе (x, y, t)

$$v = c \,.\, thu,$$

где $u = U'$. В этом случае стороны треугольника будут связаны основной тригонометрической формулой Геометрии Лобачевского.

$$ch\varphi = ch\varphi^1\, chu - sh\varphi^1\, shu\, cos\alpha,$$

где α есть угол между скоростями v и w'. Преобразуя эту формулу, получаем

$$w = \frac{\sqrt{w'^2 + v^2 + 2w'vcos\alpha - \left(\frac{w'vsin\alpha}{c^2}\right)^2}}{1 + \frac{w^1 vcos\alpha}{c^2}}$$

формулу сложения скоростей Einstein'a.

Таким образом мы построили трехмерное Евклидово пространство трех типов.

Евклидово пространство (R_2E), абсолютом которому служит плоскость Риманна R_2.

Ньютонов мир трех измерений (REE), абсолютом которому служит обыкновенная Евклидова плоскость (RE),

Мир Минковского трех измерений $(Л_2E)$, абсолютом которому служит плоскость Лобачевского.

Я не буду более приводить примеров, подтверждающих совпадение Геометрии миров Ньютона и Минковского с классической механикой и принципом относительности, и перейду к построению 4-х мерного пространства Евклида.

11. Вообразим четырехмерное проективное пространство R_4 и возьмем в нем линейное трехмерное пространство P_3, которое назовем безконечно удаленным. С этим пространством P_3 всякая прямая пересечется в одной точке, плоскость—по прямой линии и линейное трехмерное пространство—по плоскости. Чтобы установить аффинную Геометрию пространства R_4, оставим без изменения определения 2 и 3 и заменим первое следующим.

Определение 1. Две прямыя, которые пересекаются в одной и той же точке, две плоскости, которые пересекаются по одной и той же прямой, и два трехмерных линейных пространства, которые пересекаются по одной и той же плоскости пространства P_3, называются параллельными.

Метрические свойства R_4 определяются метрикой безконечно удаленного пространства P_3, каковое и служит абсолютом пространства R_4.

Совершенно так же, как при помощи прямой Риманна, Евклида и Лобачевского мы построили трех типов Евклидовы плоскости, при помощи плоскости Риманна, Евклида и Лобачевского—трех типов пространства 3 х измерений, так мы можем при помощи трехмерных пространств Риманна, Евклида и Лобачевского построить 4-х мерные Евклидовы пространства трех типов.

Если мы за абсолют P_3 возьмем трехмерное Риманново пространство (R_3), то мы получим естественное обобщение обыкновенного Евклидова пространства (R_2E), отличие которого от обыкновенного заключается только в том, что к трем координатам x,y,z присоединяется четвертая t.

Возьмем за абсолют, P_3, пространства R_4 обыкновенное трехмерное Евклидово пространство (R_2E) и пусть Риманнова плоскость R_2 служит абсолютом этому последнему. Концы осей x,y,z ортогональной системы $Oxyzt$ будут лежать на плоскости R_2, конец же оси t может находиться в любой точке абсолюта P_3. Координатные пространства $Oxyt$, $Oyzt$, $Ozxt$ будут трехмерными Ньютоновыми пространствами (N_3), пространство же $Oxyz$ обыкновенным трехмерным Евклидовым (R_2E). Законы механики Ньютона в этом последнем будут интерпретироваться как Геометрические свойства фигур пространства R_4. Это пространство может быть названо по этому миром Ньютона четырех измерений (N_4).

12. Возьмем наконец за абсолют, P_3, пространство Лобачевского трех измерений и пусть его абсолютом служит некоторая поверхность S_2 второго порядка.

Каждая прямая пространства R_4 встретит пространство $Л_3 = P_3$ только в одной точке, в конце прямой, каждая плоскость пересечется с $Л_3$ по безконечно удаленной прямой и каждое линейное пространство трех измерений—по безконечно удаленной плоскости Концы двух взаимно перпендикулярных линий пространства R_4 сопряжены по отношению к поверхности S_2, а линий пересечения с $Л_3$ двух перпендикулярных плоскостей образуют взаимные поляры S_2. Концы осей ортогональной системы $Oxyzt$ находятся в вершинах автополярного по отношению к S_2 тетраедра. Замена одной координатной системы другой соответствует замене одного тетраедра x, y, z, t, другим x', y', z', t'.

Если t, конец оси t, находится внутри поверхности S_2, есть точка реальная, то точки x, y, z, концы осей x, y, z, будут идеальными. Плоскости yzt. zxt, xyt пересекутся с поверхностью S_2 по действительным кривым и будут плоскостями Лобачевского, координатные же пространства $Oyzt$, $Ozxt$, $Oxyt$ пространствами Минковского трех измерений. Плоскость xyz будет плоскостью Риманна, а пространство $Oxyz$—обыкновенным пространством Евклида. Этот характер координатных пространств убеждает нас в том, что геометрические свойства фигур четырехмерного пространства $Oxyzt$, устанавливая связь между x, y, z, t и их производными, будут выражать законы механики *Einstein'a*. Пространство $R_4 = M_4 = (Л_3\, E)$ будет следовательно, миром Минковского четырех измерений и преобразование Лоренца представится как переход от одного координатного тетраедра $xyzt$, к другому x', y', z', t'.

Движение точки m в Евклидовом пространстве $Oxyz$, заданное ур. $x=f(t)$, $y=f_1(t)$, $z=f_2(t)$, представится в пространстве M_4 мировой линией, касательная проведенная к ней в какой нибудь точке $M(x,y,z,t)$ пересечет абсолют $Л_3$ в точке A_0. Скорость точки m в момент t в системе $(x\,y,z,t)$ представится вектором tA_0 и будет равна

$$v = c.shu, \tag{21}$$

где u есть длина отрезка tA_0. Рассуждая совершенно так же, как и в случае движения точки по прямой или по плоскости, мы можем установить однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта, остающееся неизменным при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом скоростям меньшим скорости света c будут соответствовать реальные точки абсолюта $Л_3$, лежащие внутри поверхности S_2, скоростям большим чем c — точки идельные, и наконец скоростям равным скорости света—точки самой поверхности S_2. Мы можем поверхность S_2 назвать световой поверхностью или световым абсолютом пространства Лобачевского $Л_3$.

Сложение скоростей приведется к сложению отрезков в пространстве $Л_3$ и выразится основной тригонометрической формулой Геометрии Лобачевского, которая легко преобразуется в формулу *Einstein'a*.

Еели скорость точки m меняетея, то точка A_0 ей соответствующая будет в пространстве $Л_3$ двигаться и скорость ее, измеренная собственным временем точки m и умноженная на скорость света c, может быть названа абсолютным ускорением точки m. Оно представится вектором j_a, отложенным по касательной к траектории точки S_0 и не зависящим от системы отсчета. Если мы построим комомент [1]) вектора j_a относительно конца оси t, то получим вектор

$$км_t j_a = j_r \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = j_r ch^3 u, \tag{22}$$

---

[1]) Термин заимствован из моей работы «Проективная теория векторов» Известия Казанского Ф. М. Общ. 2-ая серия т.т. VIII и IX.

где j_r есть ускорение точки m, v—скорость ее в системе (x,y,z,t) и $u=tA_0$. Если же в конце оси t мы поместим вектор $F(x,y,z)$, изображающий силу, действующую на точку m в системе (x,y,z,t), то диф. ур. движения точки

$$m\ddot{x}=\dot{t}x,\ m\ddot{y}=\dot{t}y,\ m\ddot{z}=\dot{t}z,$$

где m покоящаяся масса (Ruhmasse) точки m и производные берутся по собственному времени, в векторной форме, могут быть переписаны так

$$\kappa.u_{A_0}F \quad mj_a. \qquad (23)$$

Таким образом комомент силы, приложенной к концу оси t относительно точки A_0, соответствующей скорости v, равняется произведению массы на абсолютное ускорение. В такой форме может быть представлен второй закон динамики в принципе относительности.

Из сопоставления равенств (22)(23) легко убеждаемся, что продольная и поперечная массы соответственно равны

$$m\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \quad m\,ch^3u,\quad m\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \quad m\,chu.$$

Я не буду более рассматривать примеров из кинематики динамики и обращу только внимание на то простое геометрическое толкование, которое получает электро-магнитный вектор, т. е. вектор, состоящий из электрического смещения и магнитной силы, и закон, управляющий этим вектором при переходе от одной системы отсчета к другой.

В своем мемуаре «Пространство и время» [1]) Г. Минковский говорит: «При описании поля, вызываемого электроном, оказывается, что разделение поля на электрическую и магнитную силы есть разделение относительное и зависит от избранной оси времен; наиболее целесообразно рассматривать одновременно обе силы, руководствуясь при этом известною, хотя и неполною, аналогией, силовым винтом механики». Эти слова Минковского должны быть исправлены в том смысле, что электромагнитный вектор представляет собой совершенно полную аналогию с винтом механики, но только не в пространстве Евклида, а в пространстве Лобачевского $Л_3$, которое служит абсолютом миру Минковского.

Действительно рассмотрим кинематический винт пространства Лобачевского. Перемещение твердого тела в пространстве Лобачевского мы можем разложить на поступательное, которое определя-

[1]) Новые идеи в Математике. Сборник № 5 стр. 19.

ется перемещением какой-нибудь точки А тела и задается вектором V, и вращательное, вокруг оси, проходящей через ту же точку A, и определяемое вектором Ω. Но это разложение перемещения на поступательное и вращательное относительно. Если бы для характеристики того же самого перемещения тела мы избрали бы другую точку В, то оно—перемещение—определилось бы двумя другими векторами V' и Ω', связанными с векторами V,Ω законами кинематики пространства Лобачевского. Эта зависимость между V,Ω и V',Ω' и будет как раз той зависимостью, которая связывает элементы одного и того же вектора, отнесенного один раз к системе отсчета (x,y,z,t), у которой концом оси t служит точка А, а в другой раз к системе (x',y',z',t'), у которой конец оси t' совпадает с точкой В. Едва-ли проще можно представить себе эту зависимость. Она показывает нам, что каждому электромагнитному вектору соответствует винт в абсолюте $Л_3$.

Я не буду входить в дальнейшие подробности, ограничусь только общим замечанием, что теория векторов неевклидовых пространств, изложенная в моей работе: «Проективная теория векторов» (1899) имеет много общего с теорией векторов мира Минковского, разработанной A. Sommerfeld'ом в его мемуаре: «Zur Relativitätstheorie» [1]). Та точка зрения, которую устанавливает на мир Минковского проективная Геометрия, как на пространство четырех измерений, абсолютом которому служит трехмерное пространство Лобачевского, представляет теорию векторов мира Минковского в новом освещении, благодаря которому эта теория значительно выигрывает в простоте и ясности и связывается самым тесным образом с теорией векторов в пространстве Лобачевского. Вместе с тем устанавливается связь между геометрической интерпретацией принципа относительности при помощи Геометрии Лобачевского, предложенной Varičak'ом, и миром Минковского и становится ясным, что реальная часть пространства Лобачевского $Л_3$, которая служит абсолютом мира Минковского, и есть то пространство, которым пользуется Varičak в своих многочисленных работах.

Итак, резюмируя все выше сказанное, мы видим, что *механика Евклидова пространства трех измерений может быть рассматриваема, как Геометрия мира* (x, y, z, t) *четырех измерений. Для классической механики мы имеем мир Ньютона* N_4, *для механики Einstein'a—мир Минковского* M_4.

Безконечно удаленные элементы мира образуют его абсолют.

1) Annalen der Physik, B. 32, 1910; pp. 749—776; B. 33, 1910; pp. 649—689.

Абсолютом мира Ньютона служит обыкновенное трехмерное Евклидово пространство; абсолютом последнего мнимое коническое сечение (шаровой круг).

Абсолютом мира Минковского служит трехмерное пространство Лобачевского; абсолютом последнего световая поверхность 2-го порядка.

Так как Геометрией Лобачевского определяются метрические свойства мира Минковского, а эти свойства выражают законы принципа относительности, то можно сказать, что *Геометрия пространства Лобачевского трех измерений определяет законы механики Einstein'а.*

В том же смысле *Геометрия Евклидова пространства трех измерений определяет законы механики Ньютона.*

Со времени моего доклада Московскому Мат. Общ. 29 апр. 1923 г. появились две работы, имеющие отношение к вопросам мною затронутым. Работа Н. А. Глаголева [1]: «Римановы многообразия проективного типа», в которой автор между прочим доказывает теорему об абсолюте мира Минковского помощью дифференциальной Геометрии, из выражения элемента собственного времени

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

и работа L. Silberstein'а [2]) «Projective Geometry of Galileian Space-Time».

[1]) Математический Сборник т. 32.

[2]) Phil. Mag. October 1925 p.p. 681—696.